DS de mathématiques n°9

Espaces vectoriels, applications linéaires, matrices

Durée : **4h**. Calculatrices non autorisées.
La clarté du raisonnement et la lisibilité de la copie pourront faire varier la note de ± 1 point.
Les exercices sont de difficulté (plus ou moins) croissante et les premiers exercices rapportent plus de points (à difficulté égale) que les suivants.

Exercice 1 : Trigonalisation de matrice

On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z) = (3x + y + z, 4y + 2z, x - y + 5z)$. On note β_0 la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Donner la matrice A de l'application f dans la base β_0.

2) On pose $u_1 = (1, 1, 0)$, $u_2 = (0, 1, 1)$ et $u_3 = (1, 0, 1)$. Montrer que $\beta = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

3) On note P la matrice de passage de la base β_0 vers la base β. Déterminer P et son inverse.

4) On note B la matrice de l'application f dans la base β. Déterminer B. Vérifier que B est de la forme $\lambda I_3 + T$ avec T une matrice triangulaire supérieure dont les éléments diagonaux sont nuls.

5) Calculer B^n.

6) Déterminer l'expression de A^n en fonction de B^n, P et P^{-1}, et calculer A^n.

Exercice-Problème 2 : Décomposition d'endomorphisme en somme de projecteurs

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On note 0 l'endomorphisme nul de E et Id l'identité de E. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que :

$$f^2 - 6f + 8\mathrm{Id} = 0$$

où on a employé la notation multiplicative pour représenter la composition d'endomorphismes.

Partie I

1) Montrer que f est un automorphisme de E et donner f^{-1} en fonction de f.

2) Calculer $(f - 2\mathrm{Id}) \circ (f - 4\mathrm{Id})$ et $(f - 4\mathrm{Id}) \circ (f - 2\mathrm{Id})$.

3) Soit $x \in E$. Montrer que $f(x) - 4x \in \mathrm{Ker}\,(f - 2\mathrm{Id})$ et que $f(x) - 2x \in \mathrm{Ker}\,(f - 4\mathrm{Id})$.

4) Soit $x \in E$. En écrivant x comme une combinaison linéaire de $f(x) - 4x$ et de $f(x) - 2x$, démontrer que :

$$E = \mathrm{Ker}\,(f - 2\mathrm{Id}) + \mathrm{Ker}\,(f - 4\mathrm{Id})$$

5) En déduire que :

$$E = \mathrm{Ker}\,(f - 2\mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}\,(f - 4\mathrm{Id})$$

Les parties II et III sont indépendantes.

Partie II.

6) Démontrer que l'endormorphisme $g = f - 3\mathrm{Id}$ est une symétrie et reconnaitre ses éléments caractéristiques.

7) On note p_2 le projecteur sur $\operatorname{Ker}(f-2\mathrm{Id})$ parallèlement à $\operatorname{Ker}(f-4\mathrm{Id})$ et p_4 le projecteur sur $\operatorname{Ker}(f-4\mathrm{id})$ parallèlement à $\operatorname{Ker}(f-2\mathrm{Id})$. Pour tout $x \in E$, déterminer $p_4(x)$ et $p_2(x)$ en fonction de x et de $f(x)$.

8) En déduire que $f = 2p_2 + 4p_4$.

9) Montrer que $p_2 \circ p_4 = 0$ et que $p_4 \circ p_2 = 0$.

10) Soit $k \in \mathbb{N}$. Simplifier p_2^k et p_4^k.

11) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer f^n en fonction de p_2, p_4 et n.

Partie III.

12) Montrer que $\operatorname{Im}(f-2\mathrm{Id}) \subset \operatorname{Ker}(f-4\mathrm{Id})$ et $\operatorname{Im}(f-4\mathrm{Id}) \subset \operatorname{Ker}(f-2\mathrm{Id})$.

13) Démontrer que $\operatorname{Im}(f-2\mathrm{Id}) = \operatorname{Ker}(f-4\mathrm{Id})$ et $\operatorname{Im}(f-4\mathrm{Id}) = \operatorname{Ker}(f-2\mathrm{Id})$ de deux façons :

- **a)** Dans le cas où E est supposé de dimension finie, en utilisant le théorème du rang.
- **b)** Dans le cas général, où E est de dimension quelconque.

Exercice 3 : Tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ contient une matrice inversible

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices de taille n à coefficients dans $\mathbb{K}$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})^*$ l'espace des formes linéaires sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour toute matrice carrée M, on notera sa trace $\operatorname{Tr}(M)$. Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note φ_A l'application linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$ définie par : $\forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad \varphi_A(B) = \operatorname{Tr}(AB)$.

1) Montrer que l'application $\Phi : A \mapsto \varphi_A$ est un isomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})^*$.

2) On considère $\mathcal{H}$ un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- **a)** Démontrer qu'il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \qquad (M \in \mathcal{H} \iff \operatorname{Tr}(AM) = 0)$$

- **b)** Soit $r \in [\![1, n]\!]$. Dans cette question uniquement, on suppose que $A = J_r$, où J_r est la matrice dont les coefficients sont égaux à δ_{ij}, si $(i,j) \in [\![1, r]\!]^2$ et 0 sinon. Démontrer que $\mathcal{H}$ contient une matrice inversible.
- **c)** En déduire que $\mathcal{H}$ contient une matrice inversible dans le cas général.

Exercice 4 : Les morphismes transformistes

Soit E un e.v. et f, g, h des endomorphismes de E. On utilisera la notation multiplicative sur $\mathcal{L}(E)$, de sorte que fg désigne la composée $f \circ g$. On suppose que f, g et h vérifient $f = gh$, $g = hf$ et $h = fg$.

1) Montrer que f, g et h ont le même noyau et ont la même image.

2) Montrer que $f^5 = f$.

3) Montrer que $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$.

Recherchez "25 divided by 5 equals 14" sur Youtube... !